INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES
STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1986.

Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Note : On justifiera avec soin toutes les interversions de signes intégrale et limite, intégrale et dérivation, qui peuvent s'avérer nécessaires pour résoudre certaines questions.

PARTIE INTRODUCTIVE

1° Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} \frac{\exp(-x t^2)}{1+t^2}\, dt$ existe lorsque $x \geqslant 0$.

On définit l'application f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x t^2)}{1+t^2}\, dt.$$

Établir la continuité de cette application.

2° On admet que cette application est dérivable pour $x > 0$ et que sa dérivée est donnée par :

$$\frac{df(x)}{dx} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(-x t^2)}{1+t^2}\right) dt.$$

Vérifier que f satisfait pour $x > 0$ à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

3° Chercher la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, la valeur de $f(x)$ en 0 et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\infty} \exp(-t^2)\, dt.$$

I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

1° Vérifier que cette fonction est indéfiniment dérivable et que ses dérivées sont de la forme :

$$\frac{d^n g(x)}{dx^n} = P_n(x)\, g(x),$$

où P_n est une fonction polynomiale.

2° Utilisant la relation qui existe entre $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$ et $\frac{dP_n(x)}{dx}$, déterminer le degré de P_n et le coefficient de son terme de plus haut degré.

Vérifier que P_n ne comporte que des termes de degrés pairs ou que des termes de degrés impairs.

II

1° Montrer que la fonction h_x, indexée par $x \in \mathbb{R}$ et définie par : $h_x(u) = \exp\left(ux - \frac{u^2}{2}\right)$, $u \in \mathbb{R}$ admet un développement en série entière de la forme :

$$h_x(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} H_n(x),$$

où H_n est une fonction polynomiale.

Quel est le rayon de convergence de cette série ?

2° Donner l'expression développée de H_n.

3° Étudier les dérivées en zéro de la fonction qui, à un réel u, associe $\exp -\frac{1}{2}(u-x)^2$ et en déduire les liens entre H_n et P_n.

4° Vérifier que H_n satisfait à une équation de récurrence du type :

$$H_{n+1}(x) = a_n x H_n(x) + b_n H_{n-1}(x),$$

où a_n et b_n sont des réels que l'on précisera.

En déduire une relation entre $\frac{dH_n(x)}{dx}$ et $H_{n-1}(x)$.

5° Exprimer $H_n(x+y)$ en fonction de $H_k(x\sqrt{2})$ et $H_k(y\sqrt{2})$, $k = 0, \ldots, n$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

Page 92 1986 École Nationale de l'administration économique .Math 1

III

Soit $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N, $N \in \mathbb{N}$. On considère l'application $< . , . >$ de $\mathcal{P}_N^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathcal{P}_N : < P, Q > = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx .$$

1° On sait que $\mathcal{P}_N$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que $< . , . >$ permet de munir cet espace d'un produit scalaire.

2° Soit $P \in \mathcal{P}_N$, déterminer une expression développée de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t + u)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

en utilisant II.1°.

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad < P, H_n > = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n P(t)}{dt^n}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

3° Montrer que le système $\left\{ H_0 = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n, n = 1 \ldots N \right\}$ constitue une base orthonormée de l'espace $(\mathcal{P}_N, < . , . >)$.

4° Établir que la base précédente s'obtient par le procédé usuel d'orthonormalisation de Schmidt à partir de la base $1, x, x^2 \ldots x^N$, le procédé étant appliqué par ordre de degré croissant.

IV

On définit l'intégrale : $I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$, $p \in \mathbb{N}$.

1° Établir une équation de récurrence entre I_p et I_{p-1}. En déduire que :

$$I_p = \frac{(2p)!}{2^p\, p!} .$$

2° Montrer que les deux systèmes de fonctions polynomiales $\{ 1, x^2, x^4 \ldots x^{2n} \}$ et $\{ x, x^3 \ldots x^{2n+1} \}$ avec $2n + 1 \leqslant N$ sont orthogonaux dans $(\mathcal{P}_N, < . , . >)$.

3° On se propose maintenant d'étudier les « angles » entre deux polynômes d'un de ces systèmes; pour cela, on pose :

$$\rho_{p,q} = \frac{< x^{2p}, x^{2q} >}{\sqrt{< x^{2p}, x^{2p} >}\ \sqrt{< x^{2q}, x^{2q} >}}$$

a. Vérifier que $\rho_{p,q}$ est toujours compris entre 0 et 1.

b. Donner la valeur de $\rho_{p,q}$.

4° Étudier le comportement :

a. De la suite $\rho_{p,p+h}$, lorsque h est fixe et que p tend vers $+\infty$.

b. De la suite $\rho_{p,p+h}$, lorsque p est fixe et que h tend vers $+\infty$.

(On pourra éventuellement utiliser la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n \exp(-n) \sqrt{2\pi n},$$

lorsque n tend vers l'infini.)

V

1° Déterminer les fonctions polynomiales $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$.

2° En déduire la matrice de changement de base permettant de transformer le système $\{ 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \}$ en $\{H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5\}$.

3° Quel est l'inverse de cette matrice de changement de base ?